

L'ESPACE DES PLONGEMENTS D'UN ARC DANS UNE SURFACE

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. We prove that the space of embeddings of an arc into a surface without boundary M is homeomorphic to the product $U(M) \times I^2$, where $U(M)$ is the unit tangent bundle of M .

1. INTRODUCTION

Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métrisables et séparables. Etant donné un espace X et un compact K , nous notons $\mathcal{C}(K, X)$ l'espace des fonctions continues de K dans X , avec la topologie de la convergence uniforme, et $E(K, X)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(K, X)$ formé des plongements. Si X est un rétracte absolu de voisinage, il en est de même de $\mathcal{C}(K, X)$, mais pas nécessairement de $E(K, X)$, même quand K et X sont des espaces très simples. Très peu de résultats sont connus sur le problème de déterminer quand $E(K, X)$ est un rétracte absolu de voisinage, même quand K est le segment $I = [0, 1]$; le seul résultat général semble être celui de Sakai [9], qui a étudié l'espace $E(I, X)$ quand X est un rétracte absolu de voisinage localement compact de dimension un. D'autre part, Geoghegan a prouvé [2] que, pour une classe de compacts K contenant tous les polyèdres, $E(K, X)$ est divisible par I^2 (voir aussi [6] pour une généralisation). Alors, si K est un polyèdre tel que $E(K, X)$ soit topologiquement complet (ce quit est le cas si X est complet puisque $E(K, X)$ est un G_δ dans $\mathcal{C}(K, X)$), il résulte d'un théorème de H. Toruńczyk [10, Proposition 4.5] que $E(K, X)$ est une I^2 -variété si c'est un rétracte absolu de voisinage (non vide).

Etant donnée une surface sans bord M , nous la supposons munie d'une structure différentiable et d'une métrique riemannienne (de classe C^∞), arbitraires mais fixées, et nous notons $U(M)$ le fibré tangent unitaire de M . En utilisant le fait que la structure différentiable de M est unique à un difféomorphisme près, on peut vérifier que le type topologique de $U(M)$ ne dépend pas du choix de la structure différentiable ou de la métrique, mais nous n'utiliserons pas ce fait. Nous supposons aussi M munie d'une triangulation, arbitraire (i.e., pas nécessairement compatible avec la structure différentiable) mais fixée, et nous notons $E_{PL}(I, M)$ l'ensemble des plongements PL de I dans M . Soit I_f^2 le sous-espace de l'espace de Hilbert I^2 formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Le but de cet article est de prouver le théorème suivant.

Received by the editors April 15, 1991.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57N20.

1.1. Théorème. $(E(I, M), E_{\text{PL}}(I, M))$ est homéomorphe à $U(M) \times (I^2, I_f^2)$.

La partie la plus difficile de la démonstration est le cas où M est le plan ou, ce qui revient au même, le disque unité ouvert D du plan. A la section 2, nous utilisons la théorie des représentations conformes pour construire des fonctions qui jouent un rôle essentiel dans la suite. A la section 3, nous montrons que $E(I, D)$ est un rétracte absolu de voisinage; il en résulte que $E(I, M)$ est une I^2 -variété. A la section 4, nous montrons que le sous-ensemble de $E(I, D)$ formé des plongements f tels que $f(0) = 0$ a le type d'homotopie d'un cercle; ce résultat est utilisé à la section 5, avec des arguments élémentaires de géométrie riemannienne, pour prouver que $E(I, M)$ a le type d'homotopie de $U(M)$, donc est homéomorphe à $U(M) \times I^2$. Enfin, la démonstration est achevée à la section 6 à l'aide de résultats de West concernant les couples de (I^2, I_f^2) -variétés.

La distance d'un espace métrique X sera toujours noté d . L'espace $\mathcal{C}(K, X)$ sera supposé muni de la distance $d(f, g) = \sup_{k \in K} d(f(k), g(k))$. Si A et B sont des sous-ensembles de X , nous poserons $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$; si $A = \{x\}$, nous noterons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$. Le diamètre d'un sous-ensemble A de X sera noté $\delta(A)$.

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace X et si f et g sont deux fonctions de Y dans X , g sera dit $\mathcal{U}$ -proche de f si, pour tout y dans Y , il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$.

2. RÉSULTATS ET CONSTRUCTIONS AUXILIAIRES

Nous regardons la sphère de Riemann S^2 tantôt comme le sphère unité de $\mathbb{R}^3$, tantôt comme le compactifié $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du plan complexe, les deux étant identifiés par projection stéréographique depuis le pôle nord de S^2 . Nous supposons S^2 muni de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Pour q dans S^2 et $\varepsilon > 0$, nous notons $D(q, \varepsilon)$ (resp. $\bar{D}(q, \varepsilon)$) le disque ouvert (resp. fermé) de centre q et de rayon ε dans S^2 . Nous notons D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et S^1 son bord. Les points de $\bar{D}$ seront repérés par leurs coordonnées polaires (z, u) où $z \in S^1$ et $0 \leq u \leq 1$. Si A est un sous-ensemble de S^1 et $0 < u \leq 1$, $A \times \{u\}$ désignera l'ensemble des points (z, u) de $\bar{D}$ avec z dans A .

Il est connu que si $\bar{E}$ est un disque fermé dans S^2 , d'intérieur E , et si p est un point de $E \cap \mathbb{C}$, il existe un unique homéomorphisme φ de $\bar{D}$ sur $\bar{E}$ dont la restriction à D est une représentation conforme de D sur E vérifiant $\varphi(0) = p$ et $\varphi'(0) > 0$ (voir [8, vol. III, chap. 1 et 2]). Nous avons besoin d'une propriété de continuité de cet homéomorphisme. Soit p_0 un point fixé de $\mathbb{C}$ et, pour $n \geq 0$, soient $\bar{E}_n$ un disque fermé dans S^2 d'intérieur E_n contenant p_0 , h_n un homéomorphisme de S^1 sur le bord B_n de E_n , et φ_n l'homéomorphisme de $\bar{D}$ sur $\bar{E}_n$ dont la restriction à D est une représentation conforme vérifiant $\varphi_n(0) = p_0$ et $\varphi'_n(0) > 0$. Avec ces notations, nous avons le résultat suivant:

2.1. Lemme. Si la suite $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers h_0 sur S^1 , alors la suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers φ_0 sur $\bar{D}$.

Démonstration. Nous utiliserons le théorème 2.2 de [11]. Rappelons que la suite $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers E_0 au sens de Carathéodory (par rapport à p_0) si, notant, pour une suite strictement croissante $\{i_k\}$ d'entiers, $K(\{i_k\})$ l'ensemble

des points de S^2 qui ont un voisinage contenu dans E_{i_k} pour tout k assez grand, la composante de $K(\{i_k\})$ qui contient p_0 est égale à E_0 pour chaque telle suite $\{i_k\}$.

Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des arcs Q , ne contenant pas p_0 , dont les extrémités appartiennent à B_n et dont l'intérieur est contenu dans E_n . Pour chaque tel arc Q , $E_n \setminus Q$ a exactement deux composantes; soit $E_n(Q)$ celle qui ne contient pas p_0 , et soit $d_n(Q)$ le diamètre de $E_n(Q)$. Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, posons

$$\eta_n(\varepsilon) = \sup\{d_n(Q)/Q \in \mathcal{Q}_n \text{ et } \delta(Q) \leq \varepsilon\}.$$

D'après le théorème 2.2 de [11], il suffit, pour prouver le lemme, de vérifier les deux faits suivants:

- (a) $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers E_0 au sens de Carathéodory,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \eta_n(\varepsilon) = 0$.

Soit $\{i_k\}$ une suite strictement croissante d'entiers. Si p est un point de E_0 , soit U un voisinage compact connexe de p contenu dans E_0 et contenant p_0 . La convergence uniforme de $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ vers h_0 entraîne que $B_n \cap U = \emptyset$ pour tout n assez grand; alors U est contenu dans E_n puisqu'il est connexe et contient p_0 . Ceci entraîne que p appartient à $K(\{i_k\})$, donc que E_0 est contenu dans $K(\{i_k\})$. Soit q un point de B_0 ; alors $q = h_0(z)$, où $z \in S^1$, et tout voisinage de q contient $h_n(z)$ pour presque tout n . Ceci entraîne que q n'appartient pas à $K(\{i_k\})$, donc $B_0 \cap K(\{i_k\}) = \emptyset$. Il résulte de tout cela que la composante de $K(\{i_k\})$ contenant p_0 est égale à E_0 , d'où (a).

Le théorème de Schoenflies permet de trouver un plongement g de $S^1 \times [-1, 1]$ dans S^2 tel que $g(z, 0) = h_0(z)$ pour tout z dans S^1 . Nous pouvons supposer que $p_0 \notin g(S^1 \times [-1, 1])$. Fixons un $\varepsilon > 0$. Pour z dans S^1 et $0 < \eta < \pi$, notons $A(z, \eta)$ l'arc de S^1 de centre z et de longueur η . Prenons $0 < \eta < \pi$ vérifiant

$$(1) \quad \delta(g(A(z, \eta) \times [-\eta, \eta])) < \varepsilon \quad \forall z \in S^1.$$

Choisissons un $\alpha > 0$ vérifiant

$$(2) \quad \overline{D}(h_0(z), \alpha) \subset g(A(z, \eta) \times [-\eta, \eta]) \quad \forall z \in S^1.$$

Enfin, prenons β avec $0 < \beta < \alpha$ vérifiant

(3) Si u et v sont deux points de S^1 tels que $d(h_0(u), h_0(v)) < \beta$, alors il y a un arc J dans S^1 , d'extrémités u et v , tel que $\delta(h_0(J)) < \alpha/2$.

Soit n_0 un entier tel que

$$(4) \quad d(h_0, h_n) < \beta/3 \quad \forall n \geq n_0.$$

Pour tout z dans S^1 , $d(h_0(z), h_0(-z)) > \alpha$ d'après (2) (puisque $\eta < \pi$). Nous pouvons donc trouver un entier $n_1 > n_0$ tel que

$$(5) \quad d(h_0(z), h_n(-z)) > \alpha \quad \forall z \in S^1 \text{ et } \forall n \geq n_1.$$

Soit $n \geq n_1$, et soit $Q \in \mathcal{Q}_n$ tel que $\delta(Q) < \beta/3$. Les extrémités a et b de Q appartenant à B_n , il existe u et v dans S^1 tels que $h_n(u) = a$ et $h_n(v) = b$. Nous avons

$$\begin{aligned} d(h_0(u), h_0(v)) &\leq d(h_0(u), h_n(u)) + d(h_n(u), h_n(v)) + d(h_n(v), h_0(v)) \\ &\leq 2d(h_0, h_n) + \delta(Q) < \beta. \end{aligned}$$

D'après (3), il y a un arc J dans S^1 , d'extrémités u et v , vérifiant $\delta(h_0(J)) < \alpha/2$. Pour z dans J , nous avons

$$d(h_0(u), h_n(z)) \leq d(h_0(u), h_0(z)) + d(h_0(z), h_n(z)) < \alpha/2 + \beta/3 < \alpha,$$

d'où $h_n(J) \subset D(h_0(u), \alpha)$. Pour x dans Q , nous avons

$$d(h_0(u), x) \leq d(h_0(u), h_n(u)) + d(h_n(u), x) \leq d(h_0, h_n) + \delta(Q) < 2\beta/3 < \alpha,$$

d'où $Q \subset D(h_0(u), \alpha)$. Par définition de $\mathcal{Q}_n$, les arcs $h_n(J)$ et Q n'ont que leurs extrémités en commun, donc $C = h_n(J) \cup Q$ est une courbe simple fermée. D'après ce qui précède, C est contenue dans $D(h_0(u), \alpha)$; par suite, l'une des deux composantes F, F' de $S^2 \setminus C$, soit F , est aussi contenue dans $D(h_0(u), \alpha)$. D'après (1) et (2), $\delta(F) < \varepsilon$ et F ne contient pas p_0 . En outre, l'un des deux ensembles F et F' est aussi une composante de $E_n \setminus Q$. D'après (5), $h_n(-z)$ appartient à F' , qui ne peut donc être une composante de $E_n \setminus Q$. Par suite, F est une telle composante; puisque F ne contient pas p_0 , $F = E_n(Q)$, d'où $d_n(Q) = \delta(F) < \varepsilon$. Ceci montre que, si $n \geq n_1$ et si Q est un élément de $\mathcal{Q}_n$ tel que $\delta(Q) < \beta/3$, alors $d_n(Q) < \varepsilon$, d'où (b).

Nous notons τ la fonction de S^2 dans S^2 définie par $\tau(z) = z^2$.

Pour f dans $E(I, D)$, nous notons $T(f)$ l'unique transformation homographique de S^2 sur S^2 envoyant $f(0)$, $f(1)$ et 4 sur 0 , ∞ et 4 respectivement. Il est clair que $T(f)$ et son inverse $T(f)^{-1}$ dépendent continûment de f . L'ensemble $G(f) = S^2 \setminus (T(f) \circ f(I))$ est un ouvert simplement connexe ne contenant ni 0 , ni ∞ , donc il existe sur $G(f)$ une unique racine carrée holomorphe, $\sigma(f)$, telle que $\sigma(f)(4) = 2$. Soit $E(f) = \sigma(f)(G(f))$; la fermeture de cet ouvert est un disque $\overline{E}(f)$ dont le bord $B(f)$ contient 0 et ∞ . Supposons S^2 orientée de façon à induire sur $\mathbb{C}$ l'orientation habituelle. L'orientation de S^2 induit une orientation de $\overline{E}(f)$, laquelle, à son tour, induit une orientation sur $B(f)$.

La fonction $T(f) \circ f: I \rightarrow S^2$ a deux racines carrées continues, $k(f)$ et $l(f)$, qui sont des paramétrisations des deux arcs en lesquels les points 0 et ∞ divisent $B(f)$. Nous supposons les notations choisies de façon que, quand t varie de 0 à 1 dans I , $k(f)(t)$ se déplace de 0 à ∞ dans le sens positif sur $B(f)$ (au sens de l'orientation précédemment choisie); alors, $l(f)(t)$ se déplace de 0 à ∞ dans le sens négatif.

2.2. Lemme. *La fonction $k: E(I, D) \rightarrow E(I, S^2)$ est continue.*

Démonstration. Il faut prouver que si la suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers f_0 dans $E(I, D)$, et si la suite $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ tend vers t_0 dans I , alors $\{k(f_n)(t_n)\}_{n=1}^\infty$ tend vers $k(f_0)(t_0)$. Dans le cas contraire, puisque $\tau(k(f_n)(t_n)) = T(f_n)(f_n(t_n))$ tend vers $T(f_0)(f_0(t_0)) = \tau(k(f_0)(t_0))$, nous pouvons supposer que $\{k(f_n)(t_n)\}$ tend vers $l(f_0)(t_0) \neq k(f_0)(t_0)$, donc $t_0 \neq 0, 1$. Pour simplifier, nous écrirons dans ce qui suit, pour $n \geq 0$, $k_n = k(f_n)$ et $l_n = l(f_n)$.

Si a, p, b sont trois points d'une courbe simple fermée C , nous notons $[a, p, b]_C$, ou simplement $[a, p, b]$, l'unique arc dans C d'extrémités a et b contenant p , orienté de a vers b . L'orientation de $[a, p, b]$ détermine une orientation de C . Soit F une composante de $S^2 \setminus C$. L'orientation de S^2 induit une orientation de $\overline{F}$, laquelle détermine une orientation du bord C de F ; si cette orientation est égale (resp. opposée) à celle déterminée par

$[a, p, b]$, nous dirons que $[a, p, b]$ est positif (resp. négatif) par rapport à F . Le fait suivant se vérifie facilement.

(*) Soient C, C' deux courbes simples fermées, $[a, p, b]$ un arc contenu dans $C \cap C'$, F (resp. F') une composante de $S^2 \setminus C$ (resp. $S^2 \setminus C'$). Si F' est contenue dans F et si $[a, p, b]$ est positif (resp. négatif) par rapport à F , alors $[a, p, b]$ est positif (resp. négatif) par rapport à F' .

Soit C une courbe simple fermée contenant 2, séparant $l_0(t_0)$ de $h_0(I) \cup \{-2\}$, et rencontrant $l_0(I)$ en exactement deux points $a = l_0(u)$ et $b = l_0(v)$. Alors u et v séparent t_0 de $\{0, 1\}$ dans I , donc nous pouvons choisir les notations de façon que $0 < u < t_0 < v < 1$. Soit F la composante de $S^2 \setminus C$ qui contient $l_0(t_0)$. Alors, $C_0 = l_0([u, v]) \cup [a, 2, b]_C$ est une courbe simple fermée, et l'une des composantes de $S^2 \setminus C_0$, soit F_0 , est contenue dans F . Soient q un point de $C \setminus [a, 2, b]$ et a' (resp. b') un point de $[a, 2, b]$ situé entre a et 2 (resp. entre 2 et b). Soit J' un arc d'extrémités a' et b' dont l'intérieur est contenu dans F_0 , et soit C' la courbe simple fermée $J' \cup [a', 2, b']_C$. Soit F' la composante de $S^2 \setminus C'$ qui est contenue dans F_0 .

Nous avons $C_0 \cap B(f_0) = l_0([u, v])$; comme C_0 contient $2 \in E(f_0)$, F_0 est contenue dans $E(f_0)$. D'après le choix de l_0 , $[a, l_0(t_0), b]_{C_0}$ ($= l_0([u, v])$) est négatif par rapport à $E(f_0)$, donc aussi par rapport à F_0 , d'après (*). Alors, $[a, 2, b]$ est positif par rapport à F_0 , donc il en est de même de $[a', 2, b']$. D'après (*), $[a', 2, b']$ est positif par rapport à F' .

Notons que le compact $\tau(\overline{F'} \cup \{q\})$ est disjoint de $\tau(B(f_0)) = (T(f_0) \circ f_0)(I)$. Puisque $\{\tau \circ k_n = \tau \circ l_n\}$ converge uniformément vers $T(f_0) \circ f_0$, nous pouvons supposer que $B(f_n) \cap (\overline{F'} \cup \{q\}) = \emptyset$ pour tout n . Nous pouvons aussi supposer que $k_n(t_n)$ appartient à F pour tout n . Soit $k_n([u_n, v_n])$, où $u_n < t < v_n$, la composante de $k_n(I) \cap F$ qui contient $k_n(t_n)$; soient $a_n = k_n(u_n)$ et $b_n = k_n(v_n)$.

Affirmation. Pour n assez grand, a_n appartient à $[2, a, q]_C$, b_n appartient à $[2, b, q]_C$, et $k_n([u_n, v_n])$ est la seule composante de $B(f_n) \cap F$ dont la fermeture a une extrémité dans $[2, a, q]_C$ et l'autre dans $[2, b, q]_C$.

Pour voir cela, notons que, puisque $\{\tau \circ k_n\}$ converge uniformément vers $\tau \circ l_0$ et que $\tau|_{S^2 \setminus \{0, \infty\}}$ est un revêtement, l'ensemble A des points de $]0, 1[$ ayant un voisinage sur lequel $\{k_n\}$ converge uniformément vers l_0 est ouvert et fermé dans $]0, 1[$; du fait que $\{k_n(t_n)\}$ tend vers $l_0(t_0)$, on déduit que t_0 appartient à A , donc $A =]0, 1[$. Puisque $k_n(0) = l_n(0) = 0$ et $k_n(1) = l_n(1) = \infty$, on voit alors que $\{k_n\}$ converge uniformément vers l_0 sur I , donc $\{l_n = -k_n\}$ converge uniformément vers $-l_0 = k_0$. Il en résulte que, si n est assez grand, alors $l_n(I) \cap C = \emptyset$ et que si $k_n(s)$ appartient à $[2, a, q]_C$ (resp. $[2, b, q]_C$), alors $s < t_0$ (resp. $s > t_0$). L'affirmation en découle.

Puisque $\overline{F'} \cap B(f_n) = \emptyset$, F' est contenu dans $E(f_n)$. Soit F_n la composante de $E(f_n) \cap F$ contenant F' . Alors $\overline{F}_n$ est un disque fermé. En effet, puisque $\{T(f_n) \circ f_n\}$ converge uniformément vers $T(f_0) \circ f_0$, il y a un disque de centre 4 dans $\mathbb{C}$ contenu dans tous les ensembles $G(f_m)$, $m \geq 0$; il y a donc un disque de centre -2 dans $\mathbb{C}$ disjoint de tous les $\overline{E}_m(f)$ et de $\overline{F}$. Que $\overline{F}_n$ soit un disque fermé résulte alors du fait (dont la vérification est laissée au lecteur) que si $\overline{E}$ et $\overline{E'}$ sont deux disques fermés d'intérieurs E et E' dans le plan, et si E'' est une composante de $E \cap E'$, alors $\overline{E''}$ est un disque fermé.

Soit C_n le bord de F_n . Puisque $\overline{F'}$ est contenu dans $E(f_n)$, C_n contient $[a', 2, b']_C$. L'affirmation entraîne que, si n est assez grand, $k_n([u_n, v_n])$ est contenu dans C_n . D'après le choix de k_n , l'arc $k_n([u_n, v_n])$, orienté de a_n vers b_n , est positif par rapport à $E(f_n)$, donc aussi par rapport à F_n d'après (*). Alors, $[a_n, 2, b_n]_{C_n}$ est négatif par rapport à F_n , donc aussi $[a', 2, b']_C$. D'après (*), $[a', 2, b']_C$ est aussi négatif par rapport à F' , contrairement à ce qui a été vu plus haut, d'où le lemme.

Pour f dans $E(I, D)$, soit $\varphi(f)$ l'homéomorphisme de $\overline{D}$ sur $\overline{E}(f)$ dont la restriction à D est une représentation conforme et qui vérifie $\varphi(f)(0) = 2$ et $\varphi(f)'(0) > 0$.

2.3. Lemme. *La fonction $\varphi : E(I, D) \rightarrow \mathcal{C}(\overline{D}, S^2)$ est continue.*

Démonstration. Définissons un homéomorphisme $h(f)$ de S^1 sur $B(f)$ par

$$h(f)(e^{\pi it}) = k(f)(t), \quad h(f)(e^{-\pi it}) = -k(f)(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

D'après le lemme 2.2, h dépend continûment de f . La continuité de φ résulte alors du lemme 2.1.

Pour terminer cette section, construisons deux fonctions dont nous aurons besoin dans la suite. Définissons $\zeta : E(I, D) \rightarrow E(I, S^1)$ par

$$\zeta(f)(t) = (\varphi(f))^{-1}(k(f)(t)).$$

La continuité de ζ résulte des lemmes 2.2 et 2.3; en outre, on vérifie que $f = [T(f)]^{-1} \circ \tau \circ \varphi(f) \circ \zeta(f)$.

Définissons $\Phi : E(I, D) \times [0, 1/2] \rightarrow E(I, S^2)$ par

$$\Phi(f, s)(t) = ([T(f)]^{-1} \circ \tau)(\varphi(\zeta(f)(t), 1 - s)).$$

En explicitant les définitions, on constate que $\Phi(f, 0) = f$. Pour $0 < s \leq 1/2$, $\varphi(S^1 \times \{1 - s\})$ est contenu dans $E(f)$, sur lequel τ est injective, donc $\Phi(f, s)$ est bien un plongement de I dans S^2 . Enfin, la continuité de Φ résulte de la continuité des fonctions T , τ , φ et ζ .

Les notations définies dans cette section conserveront les mêmes significations dans la suite de l'article.

3. $E(I, D)$ EST UN RÉTRACTE ABSOLU DE VOISINAGE

La première étape de la démonstration du théorème 1.1 est d'établir le lemme suivant.

3.1. Lemme. *$E(I, D)$ est un rétracte absolu de voisinage.*

Démonstration. Soient X un espace métrique, A un fermé de X et F une fonction continue de A dans $E(I, D)$. Soient $\mathcal{M}$ l'ensemble des transformations homographiques de S^2 , et $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(\overline{D}, S^2)$ formé des plongements dont la restriction à D est une représentation conforme. Soient $q = T \circ F : A \rightarrow \mathcal{M}$, $\psi = \varphi \circ F : A \rightarrow \mathcal{A}$ et $\eta = \zeta \circ F : A \rightarrow E(I, S^1)$.

$\mathcal{M}$ est un groupe de Lie. $E(I, S^1)$ est une l^2 -variété, car il est localement homéomorphe à $E(I, I)$, qui est une l^2 -variété d'après [9]. Enfin, $\mathcal{A}$ est un rétracte absolu de voisinage d'après le lemme 11 de [7], car il est localement homéomorphe à l'espace noté $AE(D, E^2)$ dans ce lemme. Nous pouvons donc trouver un voisinage V de A dans X et des fonctions $\bar{q} : V \rightarrow \mathcal{M}$, $\bar{\psi} : V \rightarrow$

$\mathcal{A}$ et $\bar{\eta}: V \rightarrow E(I, S^1)$ prolongeant q , ψ et η respectivement. Définissons alors une fonction continue $g: V \times [0, 1/2] \rightarrow \mathcal{E}(I, S^2)$ par

$$g(x, s)(t) = (\bar{q}(x)^{-1} \circ \tau)(\bar{\psi}(x)(\bar{\eta}(x)(t), 1 - s)).$$

En explicitant les définitions, on constate que, pour x dans A , $g(x, s) = \Phi(F(x), s)$. Soit $P = g^{-1}(E(I, S^2))$. Puisque $\bar{\psi}(x)$ et $\bar{\eta}(x)$ sont des plongements et $\bar{q}(x)$ un homéomorphisme, (x, s) appartient à P si $\tau|\bar{\psi}(x)(\bar{\eta}(x)(I) \times \{1 - s\})$ est injective. Si x appartient à A , alors

$$\bar{\psi}(x)(\bar{\eta}(x)(I) \times \{1 - s\}) = \varphi(F(x))(\zeta(F(x))(I) \times \{1 - s\})$$

est contenu dans $E(F(x))$, qui est un ouvert sur lequel τ est injective. Il en résulte que P est un voisinage de $A \times]0, 1/2]$ dans $V \times [0, 1/2]$. Il est alors facile de construire un voisinage W de A contenu dans V et une fonction continue $\alpha: W \rightarrow [0, 1/2]$ telle que $\alpha^{-1}(0) = A$ et que $(x, \alpha(x))$ appartienne à P pour tout x dans W . Alors, la fonction G définie par

$$G(x) = g(x, \alpha(x))$$

envoie W dans $E(I, S^2)$ et prolonge F . Restreignant, si besoin est, G à un voisinage plus petit W' de A , on obtient une fonction à valeurs dans $E(I, D)$ prolongeant F , d'où le lemme.

4. L'ESPACE DES PLONGEMENTS FIXANT L'ORIGINE

Soit $E_0(I, \mathbb{R}^2)$ (resp. $E_0(I, D)$) le sous-espace de $E(I, \mathbb{R}^2)$ (resp. $E(I, D)$) formé des plongements f vérifiant $f(0) = 0$. Il y a une rétraction r de $E(I, \mathbb{R}^2)$ sur $E_0(I, \mathbb{R}^2)$ donnée par $r(f) = f - f(0)$.

Pour z dans S^1 , définissons $\omega_z \in E_0(I, D)$ par $\omega_z(t) = tz/2$. Nous obtenons ainsi un plongement ω de S^1 dans $E_0(I, D)$; soit $S = \omega(S^1)$. Factorisons ω en $\omega = j \circ \omega'$ où j est l'inclusion de S dans $E_0(I, D)$ et ω' un homéomorphisme de S^1 sur S . Le but de cette section est de prouver le résultat suivant.

4.1. Lemme. *L'inclusion j est une équivalence homotopique.*

Pour démontrer ce lemme, il suffit de prouver les deux affirmations suivantes.

Affirmation 1. *j a un inverse homotopique à gauche.*

Affirmation 2. *j a un inverse homotopique à droite.*

Démonstration de l'affirmation 1. Puisque $T(f)$ dépend continûment de f , sa dérivée $T(f)'$ aussi; de plus, $T(f)'(0)$ est toujours différent de 0. Nous pouvons donc définir une fonction continue $i: E(I, D) \rightarrow S^1$ par

$$i(f) = \frac{\overline{T(f)'(0)}}{|T(f)'(0)|}.$$

En explicitant la définition de $T(f)$ pour $f = \omega_z$, on constate que $T(\omega_z)$ est donné par

$$T(\omega_z)(v) = (8 - z)v/(2v - z),$$

d'où

$$T(\omega_z)'(0) = (z - 8)/z,$$

et

$$i(\omega_z) = \frac{|z|}{\bar{z}} \frac{\bar{z} - 8}{|z - 8|} = z \frac{\bar{z} - 8}{|z - 8|}.$$

L'application $z \rightarrow (\bar{z} - 8)/|z - 8|$, de S^1 dans S^1 , étant manifestement homotope à une constante, $i \circ \omega$ est homotope à l'identité de S^1 . Nous avons alors

$$(\omega' \circ i) \circ j = \omega' \circ (i \circ j \circ \omega') \circ \omega'^{-1} \simeq \omega' \circ \omega'^{-1} = \text{id}_S,$$

donc $\omega' \circ i$ est un inverse homotopique à gauche de j .

Démonstration de l'affirmation 2. Il suffit de construire une homotopie $H: E_0(I, D) \times I \rightarrow E_0(I, D)$ vérifiant $H(f, 0) = f$ et $H(f, 1) \in S$ pour toute f . La construction de H se fera en plusieurs étapes. Définissons d'abord $H_1: E_0(I, D) \times I \rightarrow E_0(I, D)$ par

$$H_1(f, s) = r \circ \Phi(f, s \cdot \alpha(f)),$$

où $\alpha: E_0(I, D) \rightarrow]0, 1/2]$ est une fonction continue suffisamment petite pour que $H_1(f, s)$ appartienne à $E_0(I, D)$ pour tout s . Posons $h_1(f) = H_1(f, 1)$.

Pour $0 < r \leq 1$, soit $S(r) = \{z \in \mathbb{C}/|z| = r\}$. Posant, pour f dans $E_0(I, D)$,

$$\psi(f) = [T(f)]^{-1} \circ \tau \circ \varphi(f) - h_1(f)(0),$$

on voit, en utilisant la définition de Φ , que $h_1(f)(I)$ est l'arc $\psi(f)(\zeta(f)(I) \times \{\alpha(f)\})$ contenu dans $\psi(f)(S(\alpha(f)))$. La fonction $\psi: E_0(I, D) \rightarrow (\bar{D}, S^2)$ est continue et, puisque $\tau|E(f)$ est injective, la restriction de $\psi(f)$ à D est une représentation conforme de D sur un ouvert de S^2 . Par suite, l'arc $h_1(f)(I)$ a, au point $h_1(f)(0)$, une tangente $L(f)$ d'équation

$$L(f) = \{tm(f) + h_1(f)(0) | t \in \mathbb{R}\},$$

où

$$m(f) = i\alpha(f)[\psi(f)'(\zeta(f)(0), \alpha(f))].$$

Remarquons que, $\psi(f)$ étant une représentation conforme, $\psi(f)'$ ne s'annule pas sur D , donc $m(f) \neq 0$. Puisque la dérivée d'une fonction holomorphe dépend continûment de la fonction (au sens de la convergence uniforme sur tout compact; voir [8, I, p. 330]), $m(f)$ dépend continûment de f . Pour $\beta \geq 0$, posons

$$A(f, \beta) = \{tm(f) + h_1(f)(0) | -\beta \leq t \leq \beta\}.$$

Affirmation 3. *Il existe une fonction continue $\beta: E_0(I, D) \rightarrow]0, 1/2]$ telle que $(h_1(f)(I)) \cap A(f, \beta(f)) = \{h_1(f)(0)\}$ pour toute f .*

Pour prouver cette affirmation, il suffit de montrer que, pour tout f dans $E_0(I, D)$, il existe un voisinage V de f et un nombre $\beta > 0$ tels que $(h_1(g)(I)) \cap A(g, \beta) = \{h_1(g)(0)\}$ pour tout g dans V . En effet, nous pouvons alors trouver un recouvrement ouvert localement fini $\{V_j\}_{j \in J}$ de $E_0(I, D)$ et des nombres $0 < \beta_j \leq 1/2$, $j \in J$, tels que $(h_1(f)(I)) \cap A(f, \beta_j) = \{h_1(f)(0)\}$ pour tout f dans V_j ; alors, si $\{\mu_j\}_{j \in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\{V_j\}$, il suffit de poser $\beta(f) = \sum_{j \in J} \mu_j(f) \beta_j$.

Fixons f dans $E_0(I, D)$. Nous pouvons trouver un voisinage V_1 de f et une fonction continue $\eta: V_1 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\zeta(g)(t) = e^{i\eta(g, t)}$ pour (g, t)

dans $V_1 \times I$. D'après le choix de $k(g)$, quand t croît, $k(g)(t)$ se déplace dans le sens positif sur $B(g)$; puisque toute représentation conforme préserve l'orientation, $\zeta(g)(t) = [\varphi(g)]^{-1}(k(g)(t))$ se déplace aussi dans le sens positif sur S^1 , i.e., $\eta(g, t)$ croît avec t . Quitte à réduire V_1 , nous pouvons supposer l'existence d'un nombre $b < 2\pi$ tel que

$$(1) \quad \eta(g, 0) \leq \eta(g, t) \leq \eta(g, 0) + b \quad \forall (g, t) \in V_1 \times I.$$

Pour $r > 0$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$, posons

$$P(r; c, d) = \{re^{i\theta} | c \leq \theta \leq d\}.$$

Le théorème des accroissements finis, appliqué à une fonction holomorphe ψ , montre que

$$\begin{aligned} & |\psi(re^{i(t_0+h)}) - [\psi(re^{it_0}) + hir\psi'(re^{it_0})]| \\ & \leq |h|r \sup\{|\psi'(re^{i\theta}) - \psi'(re^{it_0})| | t_0 \leq \theta \leq t_0 + h\}. \end{aligned}$$

Appliquant cette inégalité à $\psi(g)$, $r = \alpha(g)$ et $t_0 = 0$, et utilisant le fait que $m(g) \neq 0$ et dépend continûment de g , nous constatons qu'il est possible de trouver un voisinage V_2 de f contenu dans V_1 et un nombre $0 < a \leq b$ tels que, pour tout g dans V_2 ,

$$|\psi(g)(\alpha(g)e^{i(\eta(g,0)+h)}) - (h_1(g)(0) + hm(g))| \leq \frac{1}{2}|h||m(g)| \quad \text{pour } 0 \leq h \leq a.$$

Il en résulte que, pour g dans V_2 ,

$$(2) \quad [\psi(g)(P(\alpha(g); \eta(g, 0), \eta(g, 0) + a))] \cap A(g, \beta) = \{h_1(g)(0)\} \quad \forall \beta > 0.$$

Fixons $0 < \beta < 1$ tel que

$$[\psi(f)(P(\alpha(f); \eta(f, 0) + a, \eta(f, 0) + b))] \cap A(f, \beta) = \emptyset.$$

La continuité de ψ , α , η et m nous permet alors de trouver un voisinage V_3 de f contenu dans V_2 tel que, pour tout g dans V_3 ,

$$(3) \quad [\psi(g)(P(\alpha(g); \eta(g, 0) + a, \eta(g, 0) + b))] \cap A(g, \beta) = \emptyset.$$

Il résulte alors de (2) et (3) que, pour g dans V_3 , nous avons

$$[\psi(g)(P(\alpha(g); \eta(g, 0), \eta(g, 0) + b))] \cap A(g, \beta) = \{h_1(g)(0)\}.$$

Alors, (1) entraîne que

$$(h_1(g)(I)) \cap A(g, \beta) = \{h_1(g)(0)\},$$

d'où l'affirmation 3.

Avec la fonction β de l'affirmation 3, nous pouvons définir une fonction continue $K: E_0(I, D) \times I \rightarrow E(I, \mathbb{R}^2)$ par

$$K(f, s)(t) = \begin{cases} (t - s\beta(f))m(f) + h_1(f)(0), & 0 \leq t \leq s\beta(f), \\ h_1(f)\left(\frac{t - s\beta(f)}{1 - s\beta(f)}\right), & s\beta(f) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si β est assez petite, la fonction H_2 définie sur $E_0(I, D) \times I$ par

$$H_2(f, s) = r \circ K(f, s)$$

prend ses valeurs dans $E_0(I, D)$; soit $h_2(f) = H_2(f, 1)$. Définissons alors $H_3: E_0(I, D) \times I \rightarrow E_0(I, D)$ par

$$H_3(f, s)(t) = h_2(f)([(1-s) + s\beta(f)]t).$$

Soit $h_3(f) = H_3(f, 1)$; c'est une paramétrisation linéaire d'un segment d'origine $h_3(f)(0) = 0$ et de longueur $|h_3(f)(1)| = \beta(f)|m(f)|$. Définissons enfin $H_4: E_0(I, D) \times I \rightarrow E_0(I, D)$ par

$$H_4(f, s)(t) = \left[(1-s)|h_3(f)(1)| + \frac{s}{2} \right] \frac{h_3(f)(1)}{|h_3(f)(1)|} t.$$

Il est clair que $H_4(f, 0) = h_3(f)$ et que $H_4(f, 1)$ est une paramétrisation linéaire d'un segment d'origine 0 et de longueur 1/2, donc $H_4(f, 1)$ appartient à S . L'homotopie H s'obtient en juxtaposant H_1, H_2, H_3 et H_4 .

5. LE TYPE TOPOLOGIQUE DE $E(I, M)$

Nous prouverons dans cette section le fait suivant.

5.1. Proposition. *Pour toute surface sans bord M , $E(I, M)$ est homéomorphe à $U(M) \times I^2$.*

Démonstration. Puisque tout arc dans M a un voisinage qui est un disque, $E(I, M)$ est localement homéomorphe à $E(I, D)$, donc est un rétracte absolu de voisinage d'après le lemme 3.1. Comme il a été indiqué dans l'introduction, il découle alors de résultats de Geoghegan [2] et Toruńczyk [10] que $E(I, M)$ est une I^2 -variété. Puisque les I^2 variétés sont topologiquement déterminées par leur type d'homotopie [5], il ne reste plus qu'à vérifier que $E(I, M)$ a le type d'homotopie de $U(M)$, ce que nous ferons par une suite de lemmes.

Nous noterons $T(M)$ le fibré tangent à M , π la projection naturelle de $T(M)$ sur M , M_0 la section nulle de $T(M)$, $T_m(M)$ l'espace tangent à M au point m , et 0_m le vecteur nul de $T_m(M)$. La structure riemannienne de M induit sur chaque $T_m(M)$ une norme, que nous noterons $\| \cdot \|_m$. Pour m dans M et $\varepsilon > 0$, nous posons

$$Q_m(\varepsilon) = \{v \in T_m(M) \mid \|v\|_m < \varepsilon\}.$$

Nous noterons λ l'application exponentielle de M , qui est définie sur un voisinage de M_0 dans $T(M)$, et à valeurs dans M . Nous renvoyons le lecteur à [4] pour la définition et les propriétés élémentaires de cette application. Il nous suffit de savoir que λ est une fonction différentiable vérifiant $\lambda(0_m) = m$ pour tout m , et de connaître le lemme suivant:

5.2. Lemme. *Il existe un voisinage ouvert V de M_0 dans $T(M)$ tel que la fonction μ définie sur V par $\mu(v) = (\pi(v), \lambda(v))$ soit un difféomorphisme de V sur un voisinage W de la diagonale de $M \times M$.*

Voir [4, pp. 61–64] pour la démonstration de ce lemme.

Le lemme 5.2 nous permet de trouver une fonction continue $\varepsilon: M \rightarrow]0, 1]$ telle que $Q_m(\varepsilon(m)) \subset V$ pour tout m . Posons $W(m) = \lambda(Q_m(\varepsilon(m)))$; d'après le lemme 5.2 et le choix de ε , c'est un voisinage ouvert de m dans M , et $\lambda|_{Q_m(\varepsilon(m))}$ est un difféomorphisme de $Q_m(\varepsilon(m))$ sur W_m . Posons

$$E^\varepsilon(I, M) = \{f \in E(I, M) \mid f(I) \subset W(f(0))\}.$$

5.3. Lemme. *L'inclusion de $E^\varepsilon(I, M)$ dans $E(I, M)$ est une équivalence homotopique.*

Démonstration. En utilisant la continuité de ε et le lemme 5.2, on construit facilement une fonction continue $\alpha: E(I, M) \rightarrow]0, 1]$ telle que $f([0, \alpha(f)]) \subset$

$W(f(0))$ pour tout f . Alors, la fonction $H: E(I, M) \times I \rightarrow E(I, M)$ définie par

$$H(f, s)(t) = f((1-s) + s\alpha(f))t$$

vérifie $H(f, 0) = f$, $H(f, 1) \in E^\varepsilon(I, M)$ pour tout f , et $H(E^\varepsilon(I, M) \times I) \subset E^\varepsilon(I, M)$. Le lemme résulte de ces propriétés.

Posons

$$V_m^\varepsilon(M) = \{f \in E(I, T(M)) \mid f(0) = 0_m \text{ et } f(I) \subset Q_m(\varepsilon(m))\} \quad (m \in M),$$

$$V^\varepsilon(M) = \bigcup_{m \in M} V_m^\varepsilon(M).$$

5.4. Lemme. $E^\varepsilon(I, M)$ et $V^\varepsilon(M)$ sont homéomorphes.

Démonstration. Il résulte facilement du lemme 5.2 que la fonction $\Lambda: V^\varepsilon(M) \rightarrow E(I, M)$ définie par $\Lambda(f) = \lambda \circ f$ est un homéomorphisme de $V^\varepsilon(M)$ sur $E^\varepsilon(I, M)$ envoyant chaque $V_m^\varepsilon(M)$ sur le sous-ensemble de $E^\varepsilon(I, M)$ formé des f tels que $f(0) = m$.

A tout vecteur v de $U(M)$, associons un élément $\Omega(v)$ de $V_m^\varepsilon(M)$, où $m = \pi(v)$, en posant

$$\Omega(v)(t) = \frac{\varepsilon(m)}{2} tv.$$

Nous obtenons ainsi un homéomorphisme Ω de $U(M)$ sur un sous-ensemble U de $V^\varepsilon(M)$.

Le lemme suivant, combiné avec les lemmes 5.3 et 5.4, achèvera donc la démonstration de la proposition 5.1.

5.5. Lemme. *L'inclusion de U dans $V^\varepsilon(M)$ est une équivalence homotopique.*

Pour prouver ce lemme, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

5.6. Lemme. *Soient X, Y des rétractes absolus de voisinage, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ et $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ des recouvrements ouverts de X et Y resp. indexés par le même ensemble, et f une fonction continue de X dans Y telle que $f(U_j) \subset V_j$ pour tout j . Si, pour tout sous-ensemble fini $\{j_1, \dots, j_k\}$ de J , $f|_{U_{j_1} \cap \dots \cap U_{j_k}}$ est une équivalence homotopique de $U_{j_1} \cap \dots \cap U_{j_k}$ dans $V_{j_1} \cap \dots \cap V_{j_k}$, alors f est une équivalence homotopique.*

Puisqu'une équivalence homotopique faible entre rétractes absolus de voisinage est une équivalence homotopique, ce lemme est un cas particulier du théorème 5(b) de [1].

Démonstration du lemme 5.5. Il est facile de vérifier, à l'aide du lemme 5.2, que $E^\varepsilon(I, M)$ est un ouvert de $E(I, M)$, donc un rétracte absolu de voisinage; d'après le lemme 5.4, il en est de même de $V^\varepsilon(M)$. Soit $\{M_j\}_{j \in J}$ l'ensemble des ouverts de M qui sont difféomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Pour j dans M , posons $V_j = \bigcup_{m \in M_j} V_m^\varepsilon(M)$ et $U_j = V_j \cap U$. Alors, $\{V_j\}_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert de $V^\varepsilon(M)$ stable par intersection finie, donc, d'après le lemme 5.6, il suffit de prouver que, pour tout j , l'inclusion de U_j dans V_j est une équivalence homotopique.

Fixons j . Soit χ un difféomorphisme de M_j sur un ouvert 0 de $\mathbb{R}^2$. Définissons un homéomorphisme ψ de $\pi^{-1}(M_j)$ sur $0 \times \mathbb{R}^2$ en posant

$$\psi(v) = \begin{cases} \left(\chi(m), \frac{\|v\|_m}{\varepsilon(m)} \frac{\chi'_m(v/\|v\|_m)}{\|\chi'_m(v/\|v\|_m)\|} \right) & \text{si } v \neq 0_m, \\ (\chi(m), 0) & \text{si } v = 0_m, \end{cases}$$

où $m = \pi(v)$ et $\chi'_m: T_m(M) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la différentielle de χ au point m . Alors, $\psi(Q_m(\varepsilon(m))) = \{\chi(m)\} \times D$, et l'on vérifie que, S et $E_0(I, D)$ étant comme dans la section 4, on obtient un homéomorphisme Ψ de (V_j, U_j) sur $0 \times (E_0(I, D), S)$ en posant $\Psi(f) = \psi \circ f$. Le lemme 4.1 entraîne alors le résultat cherché.

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

Puisque $E(I, M)$ est homéomorphe à $U(M) \times I^2$, il suffit, d'après le théorème 6 de [12], de montrer que chaque élément f de $E(I, M)$ a un voisinage V tel que $(V, V \cap E_{\text{PL}}(I, M))$ soit homéomorphe à (I^2, I_j^2) . Mais $f(I)$ a un voisinage W dans M qui est PL-homéomorphe à D ; alors $E(I, W)$ est un voisinage de f et $(E(I, W), E_{\text{PL}}(I, W))$ est homéomorphe à $(E(I, D), E_{\text{PL}}(I, D))$. Il suffit donc de considérer le cas où $M = D$ et, toujours d'après le théorème 6 de [12], il suffit alors de montrer que les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(A) $E_{\text{PL}}(I, D)$ est réunion dénombrable de compacts de dimension finie,

(B) pour tout compact de dimension finie C contenu dans $E(I, D)$, tout compact C' contenu dans $C \cap E_{\text{PL}}(I, D)$, et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $E(I, D)$, il existe un plongement H de C dans $E_{\text{PL}}(I, D)$ qui est $\mathcal{U}$ -proche de l'inclusion et vérifie $H|C' = \text{id}$.

La condition (A) a été prouvée par Geoghegan [3, théorème 1.9]. Pour vérifier (B), nous avons besoin de quelques préliminaires.

Prolongeons chaque élément f de $E(I, D)$ en une fonction continue $\hat{f}$ de $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ dans D en posant $\hat{f}(t) = f(1)$ pour $t \geq 1$. Pour f dans $E(I, D)$ et $0 < \varepsilon \leq 1/2$, définissons une fonction continue $\hat{\Xi}(f, \varepsilon)$ de $\mathbb{R}^+$ dans D comme suit.

$$\hat{\Xi}(f, \varepsilon)(n\varepsilon) = \hat{f}(n\varepsilon) \quad \text{pour } n \text{ entier } \geq 0,$$

$$\hat{\Xi}(f, \varepsilon)|[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon] \text{ est linéaire pour tout } n.$$

Soit $\Xi(f, \varepsilon)$ la restriction de $\hat{\Xi}(f, \varepsilon)$ à I .

6.1. Lemme. *Il existe une fonction continue $\alpha: E(I, D) \times]0, 1/2] \rightarrow]0, 1/2]$ telle que la fonction $\Psi: E(I, D) \times [0, 1/2] \rightarrow \mathcal{C}(I, D)$ définie par*

$$\Psi(f, 0) = f, \quad \Psi(f, s) = \Xi(\Phi(f, s), \alpha(f, s)) \quad \text{pour } 0 < s \leq 1/2,$$

soit continue et à valeurs dans $E(I, D)$.

Démonstration. En utilisant la continuité de Φ et le fait que toute fonction continue sur I est uniformément continue, il est facile de trouver une fonction continue α_1 de $E(I, D) \times]0, 1/2]$ dans $]0, 1/2]$ vérifiant

$$(1) \quad d(\Phi(f, s), \Xi(\Phi(f, s), \varepsilon)) < s \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leq \alpha_1(f, s).$$

Affirmation. Pour tout (f, s) dans $E(I, D) \times]0, 1/2]$, il existe un voisinage V de (f, s) dans $E(I, D) \times]0, 1/2]$ et un nombre $0 < \eta \leq 1/2$ tels que $\Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon) \in E(I, D)$ pour $(f', s') \in V$ et $0 < \varepsilon \leq \eta$.

Supposant cette affirmation démontrée, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert localement fini $\{V_j\}_{j \in J}$ de $E(I, D) \times]0, 1/2]$ et, pour tout j , un nombre $0 < \eta_j \leq 1/2$ tels que $\Xi(\Phi(f, s), \varepsilon) \in E(I, D)$ pour (f, s) dans V_j et $0 < \varepsilon \leq \eta_j$ ($j \in J$). Soit $\{\mu_j\}_{j \in J}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{V_j\}_{j \in J}$. Définissons la fonction continue α_2 de $E(I, D) \times]0, 1/2]$ dans $]0, 1/2]$ par $\alpha_2(f, s) = \sum_{j \in J} \mu_j(f, s) \eta_j$. Il est clair que α_2 vérifie

$$(2) \quad \Xi(\Phi(f, s), \varepsilon) \in E(I, D) \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leq \alpha_2(f, s).$$

Prenons $\alpha(f, s) = \min(\alpha_1(f, s), \alpha_2(f, s))$. La relation (1) et la continuité de Φ garantissent la continuité de Ψ , tandis que la relation (2) garantit que Ψ est à valeurs dans $E(I, D)$.

Reste à prouver l'affirmation. Pour cela, considérons d'abord un plongement continûment différentiable g de I dans D tel que $g'(t) \neq 0$ pour tout t . Soit $m > 0$ tel que $|g'(t)| > m$ pour tout t , et soit $\delta > 0$ tel que $0 < |t - t'| < \delta$ entraîne $|g'(t) - g'(t')| < m/\sqrt{2}$. Montrons que si $0 < t' - t < \delta/2$ et $0 < \varepsilon \leq \delta/2$, alors $\Xi(g, \varepsilon)(t) \neq \Xi(g, \varepsilon)(t')$. Soient n et n' tels que $n\varepsilon \leq t < (n+1)\varepsilon$ et $n'\varepsilon \leq t' < (n'+1)\varepsilon$. Comme $t < t' \leq 1$, $n\varepsilon < 1$, donc $\hat{g}(n\varepsilon) \neq \hat{g}((n+1)\varepsilon)$ puisque g est un plongement, donc la restriction de $\Xi(g, \varepsilon)$ à $[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$ est injective; par suite, nous pouvons supposer $n < n'$. Soit $t_0 = (n+1)\varepsilon$; alors

$$|t_0 - (n' + 1)\varepsilon| \leq |t - t'| + |t' - (n' + 1)\varepsilon| < \delta/2 + \varepsilon \leq \delta.$$

Le théorème des accroissements finis nous donne, pour $|h| \leq \delta$,

$$(3) \quad \begin{aligned} |g(t_0 + h) - (g(t_0) + hg'(t_0))| &\leq |h| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} |g'(t_0 + \theta h) - g'(t_0)| \\ &< |h| \frac{m}{\sqrt{2}} \leq |h| \frac{|g'(t_0)|}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Soient D_1 et D_2 les droites passant par $g(t_0)$ et faisant avec la tangente L à g en t_0 un angle (non orienté) de $\pi/4$. La distance du point $g(t_0) + hg'(t_0)$ à D_1 ou D_2 est égale à $|h||g'(t_0)|/\sqrt{2}$. L'inégalité (3) montre donc que, pour $0 < |h| \leq \delta$, le point $g(t_0 + h)$ est contenu dans l'intérieur du cône K d'axe L et de sommet $g(t_0)$ limité par D_1 et D_2 , donc, si K_1 et K_2 sont les deux demi-cônes en lesquels $g(t_0)$ divise K , $g(t_0 + h)$ est contenu dans l'intérieur de l'un d'eux pour $0 < h \leq \delta$, et dans l'intérieur de l'autre pour $-\delta \leq h < 0$. Alors, les inégalités

$$t_0 - \delta/2 \leq n\varepsilon \leq t < t_0 \leq n'\varepsilon \leq t' \leq \min(1, (n' + 1)\varepsilon) \leq t_0 + \delta$$

et la définition de $\Xi(g, \varepsilon)$ entraînent que $\Xi(g, \varepsilon)(t)$ est dans l'intérieur de l'un des ensembles K_1 et K_2 tandis que $\Xi(g, \varepsilon)(t')$ est dans l'autre, d'où $\Xi(g, \varepsilon)(t) \neq \Xi(g, \varepsilon)(t')$.

Des arguments utilisés à la section 4 (voir la démonstration de l'affirmation 2 du lemme 4.1) montrent que $\Phi(f, s)$ est, pour $s > 0$, un plongement continûment différentiable de I dans D dont la dérivée ne s'annule pas et dépend continûment de (f, s) . Ce qui précède nous permet alors de trouver un voisinage V_1 de (f, s) dans $E(I, D) \times]0, 1/2]$ et un nombre $\delta > 0$ tels que, pour

(f', s') dans V_1 et $0 < \varepsilon \leq \delta$, on ait

$$\Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t) \neq \Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t') \quad \text{si } 0 < |t - t'| < \delta.$$

En utilisant la continuité de Φ et le fait que $\Phi(f, s)$ est un plongement, il est facile de trouver un voisinage V_2 de (f, s) dans $E(I, D) \times]0, 1/2]$ et un nombre $0 < \eta \leq \delta$ tels que, pour (f', s') dans V_2 et $0 < \varepsilon \leq \eta$, on ait

$$\Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t) \neq \Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t') \quad \text{si } |t - t'| \geq \delta.$$

Alors, $V = V_1 \cap V_2$ vérifie l'affirmation.

Vérification de (B). Prenons une fonction continue $\omega: E(I, D) \rightarrow]0, 1]$ vérifiant

- (4) $\forall f \in E(I, D)$, la boule ouverte de centre f et de rayon $2\omega(f)$ est contenue dans un élément de $\mathcal{U}$.

Puisque la fonction continue Ψ vérifie $\Psi(f, 0) = f$, nous pouvons trouver une fonction continue $\beta: C \rightarrow]0, 1/2]$ vérifiant

$$(5) \quad \beta^{-1}(0) = C',$$

$$(6) \quad d(f, \Psi(f, \beta(f))) \leq \min(\omega(f), \frac{1}{4}d(f, C')) \quad \forall f \in C.$$

Posons $F(f) = \Psi(f, \beta(f))$ et $\gamma(f) = \frac{1}{2}\alpha(f, \beta(f))$, où α est comme dans l'énoncé du lemme 6.1. Alors, si $f \in C \setminus C'$, il résulte de la définition de Ψ que $F(f)$ est un plongement PL dont la restriction à $[0, 2\gamma(f)]$ est linéaire.

Pour f dans $C \setminus C'$ et $\xi > 0$, définissons une fonction $G(f, \xi)$ de I^2 dans $\mathbb{C}$ par

$$(7) \quad G(f, \xi)(t, u) = F(f)(t\gamma(f)) + \frac{i\xi u(F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0))}{|F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0)|}.$$

Puisque $F(f)|[0, 2\gamma(f)]$ est linéaire, $G(f, \varepsilon)$ est un plongement affine de I^2 dans $\mathbb{C}$ dont l'image est un rectangle vérifiant

$$(8) \quad G(f, \xi)(I^2) \cap F(f)([0, 2\gamma(f)]) = F(f)([0, \gamma(f)]).$$

En outre, nous avons

$$(9) \quad d(G(f, \xi)(t, u), F(f)(t\gamma(f))) \leq \xi u,$$

ce qui nous permet de trouver une fonction continue $\xi: C \setminus C' \rightarrow]0, 1]$ vérifiant, pour f dans $C \setminus C'$ et (t, u) dans I^2 ,

$$(10) \quad \begin{aligned} & d(G(f, \xi(f))(t, u), F(f)(t\gamma(f))) \\ & < \min[\omega(f), \frac{1}{4}d(f, C'), d(F(f)(I), \mathbb{C} \setminus D), \\ & \quad d(F(f)([0, \gamma(f)]), F(f)([2\gamma(f), 1]))]. \end{aligned}$$

Puisque C est de dimension finie, nous pouvons trouver un entier k et un plongement ν de C dans I^k . Construisons un plongement ρ de I^k dans $E_{\text{PL}}(I, I^2)$ comme suit. Prenons $2k + 3$ points $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2k+2} = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_k)$ dans I^k , définissons $\rho(x)$ comme suit:

$$\rho(x)(t_{2i}) = 0, \quad 0 \leq i \leq k + 1,$$

$$\rho(x)(t_{2i-1}) = \frac{1}{2}(1 + x_i), \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$\rho(x)(t_{2k+1}) = 1,$$

$$\rho(x) \text{ est linéaire sur chaque intervalle } [t_i, t_{i+1}], \quad 0 \leq i < 2k + 2.$$

Il est clair que ρ est continue. Si $x = (t_1, \dots, x_k) \neq x' = (x'_1, \dots, x'_k)$, il y a un i tel que $x_i \neq x'_i$, d'où $\rho(x)(t_{2i-1}) \neq \rho(x')(t_{2i-1})$, donc ρ est bien un plongement. Pour f dans $C \setminus C'$, nous pouvons maintenant définir une fonction continue $H(f)$ de I dans $\mathbb{C}$ par

$$H(f)(t) = \begin{cases} F(f)(t), & \text{si } \gamma(f) \leq t \leq 1, \\ G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(t/\gamma(f))), & 0 \leq t \leq \gamma(f). \end{cases}$$

Cette définition a un sens car $\rho \circ \nu(f)(1) = (1, 0)$ et $G(f, \xi(f))(1, 0) = F(f)(\gamma(f))$. La condition (10) entraîne que $H(f)([0, \gamma(f)])$ est contenu dans $D \setminus F(f)([2\gamma(f), 1])$; combiné avec (8), cela montre que $H(f)$ est un plongement de I dans D . Puisque $F(f)$, $\rho \circ \nu(f)$ et $G(f, \xi(f))$ sont PL, il en est de même de $H(f)$. Puisque F , G , ξ , ρ , ν et γ sont continues, H aussi. Les conditions (6) et (10) garantissent que

$$(11) \quad d(f, H(f)) \leq \frac{1}{2}d(f, C') \quad \forall f \in C \setminus C'.$$

Par suite, H se prolonge en une fonction continue de C dans $E_{PL}(I, D)$ si l'on pose $H(f) = f$ pour f dans C' . D'après (6) et (10), nous avons $d(f, H(f)) < 2\omega(f)$, donc (4) entraîne que H est $\mathcal{U}$ -proche de l'inclusion. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que H est un plongement; comme (11) entraîne que $H(C') \cap H(C \setminus C') = \emptyset$, il suffit de montrer que $H|_{C \setminus C'}$ est injective. Soient donc f et f' deux points de $C \setminus C'$ tels que $H(f) = H(f')$. Remarquons que, d'après la définition de $H(f)$, les $2k+2$ premiers points anguleux de l'arc polygonal $H(f)(I)$, en partant de $H(f)(0)$, sont $H(f)(t_1\gamma(f))$, $\dots$, $H(f)(t_{2k+2}\gamma(f))$; comme il en est de même pour $H(f')$, nous avons nécessairement $t_1\gamma(f) = t_1\gamma(f')$, d'où $\gamma(f) = \gamma(f')$ et $H(f)(t_i\gamma(f)) = H(f')(t_i\gamma(f))$ pour $1 \leq i \leq 2k+2$. Nous avons

$$\begin{aligned} H(f, 0) &= G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(0)) = G(f, \xi(f))(0, 0) = F(f)(0), \\ H(f, t_{2k+2}\gamma(f)) &= H(f, \gamma(f)) = G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(1)) \\ &= G(f, \xi(f))(1, 0) = F(f)(\gamma(f)). \end{aligned}$$

Les relations analogues pour f' entraînent alors $F(f)(0) = F(f')(0)$ et $F(f)(\gamma(f)) = F(f')(\gamma(f))$. Puisque $F(f)$ et $F(f')$ sont linéaires sur $[0, \gamma(f)]$, nous avons donc

$$(12) \quad F(f)(t\gamma(f)) = F(f')(t\gamma(f)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

De plus,

$$\begin{aligned} H(f, t_{2k+1}\gamma(f)) &= G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(t_{2k+1})) = G(f, \xi(f))(t_{2k+1}, 1) \\ &= F(f)(t_{2k+1}\gamma(f)) + \frac{i\xi(f)(F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0))}{|F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0)|}. \end{aligned}$$

La formule analogue pour $H(f', t_{2k+1}\gamma(f))$, combinée avec (12), nous donne alors $\xi(f) = \xi(f')$, d'où $G(f, \xi(f)) = G(f', \xi(f'))$ d'après (7). Comme nous avons, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\rho \circ \nu(f)(t) = [G(f, \xi(f))]^{-1}(H(f)(t\gamma(f))),$$

ainsi qu'une formule analogue pour f' , nous obtenons $\rho \circ \nu(f) = \rho \circ \nu(f')$, d'où $f = f'$ puisque ρ et ν sont des plongements.

BIBLIOGRAPHIE

1. T. tom Dieck, *Partitions of unity in homotopy theory*, *Compositio Math.* **23** (1971), 159–167.
2. R. Geoghegan, *On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions*. I, *Topology* **11** (1972), 159–177.
3. —, *On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions*. II: *The piecewise linear case*, *Proc. London Math. Soc.* (3) **27** (1973), 463–483.
4. D. Gromoll, W. Klingenberg, and W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 55, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
5. D. W. Henderson and R. M. Schori, *Topological classification of infinite dimensional manifolds by homotopy type*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 121–124.
6. J. Keesling, *Using flows to construct Hilbert space factors of function spaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **161** (1971), 1–24.
7. R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **164** (1972), 275–285.
8. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Chelsea, New York, 1977.
9. K. Sakai, *An embedding space triple of the unit interval into a graph and its bundle structure*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (1991), 1171–1176.
10. H. Toruńczyk, *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, *Fund. Math.* **86** (1974), 53–67.
11. N. R. Wagner, *A continuity property with applications to the topology of 2-manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **200** (1974), 369–393.
12. J. E. West, *The ambient homeomorphy of an incomplete subspace of infinite dimensional Hilbert space*, *Pacific J. Math.* **34** (1970), 257–267.

UNIVERSITÉ DE PARIS VI, U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4, PLACE JUSSIEU,
75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE